BLAISE PASCAL, MATHÉMATICIEN

par Mme Élise JANVRESSE

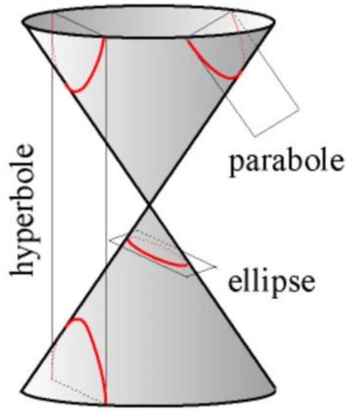
Professeure de mathématiques à l'université de Picardie Jules Verne

Blaise Pascal est sans doute plus connu pour ses travaux en philosophie et en physique, ou encore ses réflexions sur la religion. Pourtant ses contributions en mathématiques sont exceptionnelles et ont ouvert plusieurs champs de recherche encore actifs aujourd'hui. On m'a demandé aujourd'hui de vous parler des mathématiques de Blaise Pascal, et en particulier des travaux qu'il a effectués lorsqu'il habitait Rouen.

En 1639, la famille Pascal s'installe à Rouen, où Étienne, le père de Blaise Pascal, est nommé commissaire du roi pour la levée des tailles. Enfant très précoce, Blaise commence dès l'âge de seize ans à travailler sur ce qui deviendra plus tard la géométrie projective, qui modélise les notions intuitives de perspective et d'horizon. Il utilise et approfondit les travaux de l'architecte et géomètre Girard Desargues[1], qu'il est sans doute le seul à comprendre à l'époque. Ainsi, en 1640, il fait imprimer son Essay pour les coniques, qui contient notamment un théorème concernant un hexagone inscrit dans une conique. Une conique est la courbe obtenue en prenant l'intersection d'un plan avec un cône de révolution : une ellipse, une parabole ou les deux parties infinies d'une hyperbole (voir figure ci-après).

---

[1] DESARGUES, 1639



Le théorème de Pascal énonce qu'il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

- l'hexagone est inscrit dans une conique ;
- les points d'intersection des trois paires de côtés opposés de l'hexagone sont alignés.

Mais Blaise Pascal n'est pas seulement un théoricien. À 18 ou 19 ans, il commence le développement de la première machine à calculer, afin de soulager son père dans son travail. Une de ses tâches consistait en effet à remettre en ordre les recettes fiscales de Normandie, ce qui imposait de faire énormément de calculs. À l'époque, ces calculs étaient effectués avec des jetons ou « à la plume ».

Cette première machine, appelée par Pascal *machine d'arithmétique*, permettait d'additionner et de soustraire deux nombres d'une façon directe. Il s'agit de la première d'une longue série de machines qui permettent - comme le dit joliment Pascal - de « relever du défaut de la mémoire », c'est-à-dire d'aider l'homme dans ses calculs en les automatisant. Même si d'autres machines plus perfectionnées furent mises au point au cours du siècle suivant, elle reste la seule machine arithmétique décrite dans l'encyclopédie de Diderot & d'Alembert.

« La première machine arithmétique qui ait paru est de Blaise Pascal, né à Clermont en Auvergne le 19 juin 1623 ; Il l'inventa à l'âge de dix-neuf ans. On en a fait quelques autres depuis qui, au jugement même de MM. de l'Académie des Sciences, paraissent avoir sur celle de Pascal des avantages dans la pratique ; mais celle de Pascal est la plus ancienne ; elle a pu servir de modèle à toutes les autres ; c'est pourquoi nous l'avons préférée ».

Extrait de l'article Arithmétique (machine)[2], *Encyclopédie de Diderot*, de D'Alembert et de Jaucourt, vol. I (1751), p. 680b–684b

Avant de nous pencher sur le fonctionnement de cette machine, maintenant connue sous le nom de *pascaline*, laissez-moi évoquer un autre travail de Blaise Pascal, son traité du triangle arithmétique. Celui-ci n'a pas été réalisé lors du séjour à Rouen de Blaise, mais comme je suis probabiliste, je ne résiste pas à l'envie de vous en parler !

Cette fois, il ne s'agit pas d'un traité de géométrie : le triangle auquel Pascal a donné son nom contient des nombres entiers disposés en triangle. Outre un rappel de sa définition, le traité contient une série de dix-neuf propriétés du triangle et en propose plusieurs utilisations. Le troisième « usage » permet par exemple de résoudre le problème des partis, qui porte sur les jeux de hasard, et sur lequel Blaise Pascal et Pierre de Fermat ont beaucoup échangé. Le chevalier de Méré avait posé la question suivante : imaginez deux joueurs misant lors d'un jeu de hasard dans lequel le premier ayant gagné trois parties est déclaré vainqueur ; comment répartir les mises si le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait gagné trois fois et ainsi remporté la victoire ? Ce problème d'apparence très simple est considéré comme avoir joué un rôle fondamental dans l'émergence du calcul des probabilités.

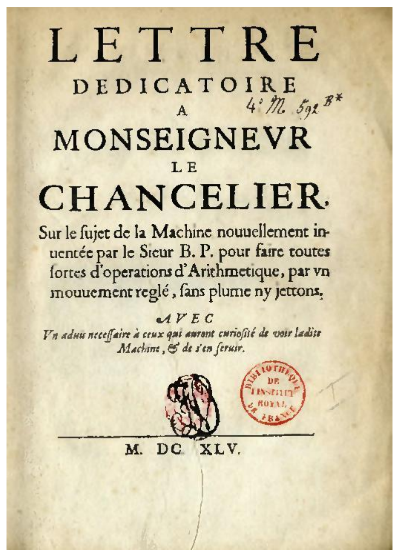
Mais le fait le plus marquant du traité est l'émergence du raisonnement par récurrence, que Pascal énonce en un texte d'une vingtaine de lignes et qui est devenu depuis un outil de démonstration commun en

[2] http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/article/v1-2891-10/

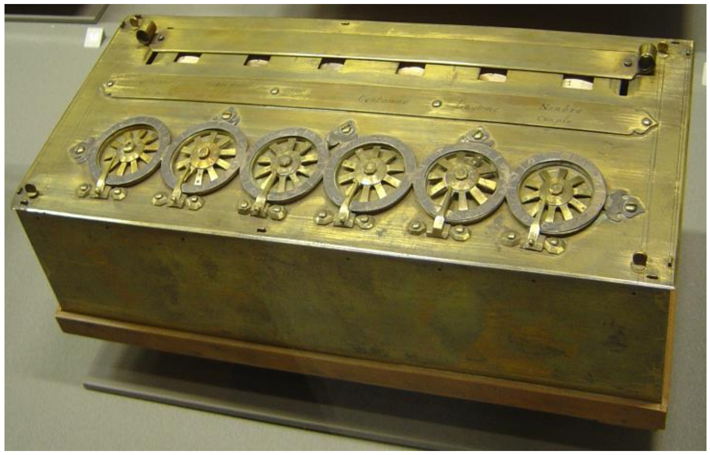
mathématiques : on l’apprend d’ailleurs au lycée lorsqu’on choisit la spécialité mathématiques. J’y reviendrai à la fin de mon exposé.

Revenons à la pascaline, qui – elle – a bien été mise au point à Rouen. Après trois ans de recherches et une cinquantaine de prototypes, Blaise Pascal présente sa machine à ses contemporains en annonçant son invention dans une lettre dédiée au chancelier de France, Pierre Séguier. Il s’agit presque d’un prospectus publicitaire, dans lequel Pascal vante les mérites de sa machine : il affirme qu’elle est robuste et prend peu de place, que son utilisation est très simple et très commode, et les calculs rapides.

En 1649, un privilège royal, promulgué par Louis XIV, lui donne l'exclusivité de la production de machines à calculer en France. Pascal cherche alors à réduire le coût de fabrication de sa machine. Pourtant, la pascaline est un échec commercial, son coût restant élevé pour le grand public.


LETTRE
DEDICATOIRE
A
MONSEIGNEVR
LE
CHANCELIER.
Sur le sujet de la Machine nouuellement inuentée par le Sieur B. P. pour faire toutes sortes d'operations d'Arithmetique, par vn mouuement reglé, sans plume ny jettons.
AVEC
Vn aduis necessaire à ceux qui auront curiosité de voir ladite Machine, & de s'en seruir.
M. DC. XLV.

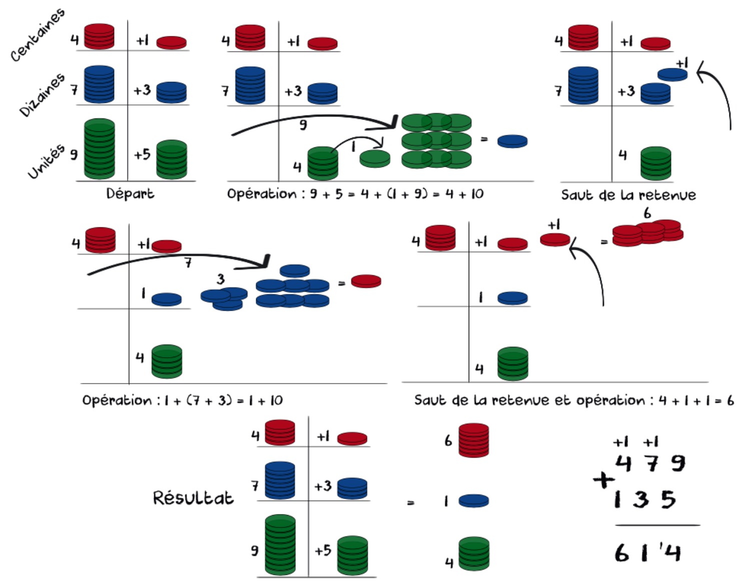
Voyons maintenant d'un peu plus près à quoi ressemble la pascaline. La partie basse, composée de roues d'inscriptions, permet l'entrée des données.



La partie haute est composée d'un ensemble de lucarnes qui servent à l'affichage des résultats. Chaque lucarne est directement associée à une roue d'inscription.

Notez la barre horizontale coulissante, que l'on positionne différemment selon que l'on souhaite faire une addition ou une soustraction. En effet, chaque lucarne de résultat présente deux chiffres positionnés l'un au-dessus de l'autre qui sont complémentaires dans la base choisie (j'y reviendrai) ; la barre masque une ligne à la fois, montrant ainsi soit tous les chiffres directs, soit tous leurs compléments.

Avant de passer à la description du mécanisme, rappelons comment on faisait une addition avec des jetons. La figure suivante explicite les étapes pour effectuer l'addition 479 + 135.



Sur le plan théorique, la conception de la pascaline et son fonctionnement sont très simples. Chaque roue a dix crans, pour les chiffres de 0 à 9. La roue la plus à droite correspond aux chiffres des unités, la suivante au chiffres des dizaines, etc. La difficulté principale que Pascal doit résoudre est le problème de la retenue. Si, au cours d'une opération, la roue des unités arrive à 9 et doit être incrémentée d'une unité, il faut un mécanisme pour faire avancer la roue des dizaines d'une unité. Chaque roue est donc reliée à la suivante. Qui plus est, cette opération doit s'effectuer en cascade quand le processus de l'opération atteint par exemple 999 et qu'il faut ajouter une unité pour arriver à 1 000.

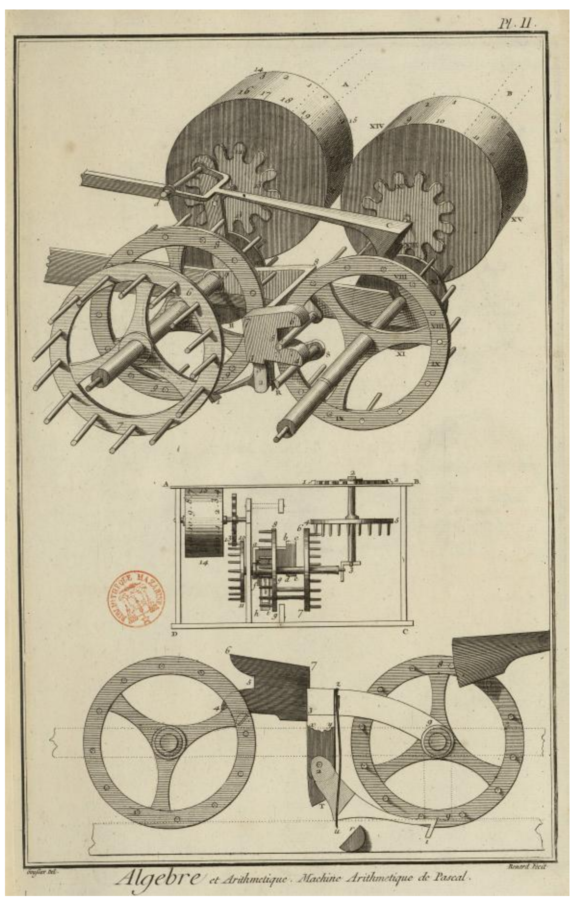
Le génie de Pascal transparaît dans la solution qu'il imagine pour résoudre ce problème : le report de la retenue d'une roue à l'autre se fait par un "sautoir", pièce métallique progressivement armée par la rotation d'une roue, et retombant par gravité, au passage de 9 à 0, pour faire progresser d'un cran la roue suivante. Ce système rend les roues indépendantes les unes des autres, ce qui évite le blocage en cas de propagation de la retenue sur plusieurs roues.

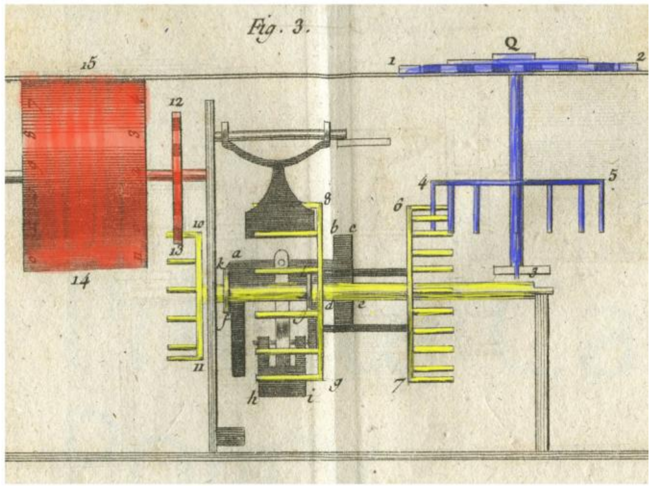
Comment effectuer l'addition 479 + 135 avec la pascaline ?

- Mettre la barre en mode addition (bas visible).
- Afficher 479 dans la lucarne .
- Tourner la roue des unités de cinq crans, la roue des dizaines de trois crans et la roue des centaines d'un cran.

La machine affiche 614 !

La pascaline aurait pu contenir moins d'engrenages mais Pascal souhaitait que l'inscripteur et l'afficheur se trouvent sur le dessus de la machine, afin que son utilisation soit plus agréable. Dans le dessin coloré, les rouages bleus (entrée des données) s'emboîtent avec les jaunes (application des règles d'arithmétique, recevant le sautoir du chiffre précédent et prêt à envoyer son propre sautoir au chiffre suivant) qui eux-mêmes font tourner les rouages d'affichage (rouges).





Comment soustraire ?

Le mécanisme du sautoir n'étant pas réversible, on ne peut pas faire une soustraction en faisant tourner les roues à l’envers. L’idée ingénieuse de Pascal est d’utiliser le principe du complément à 9. En base 10, le c*omplément à 9* d'un chiffre *d* est *C(d) = 9-d*. Pour un nombre à plusieurs chiffres, il suffit de remplacer chaque chiffre par son complément. Par exemple, le complément de 479 est *C*(479) = 999 - 479 = 520.

Chaque lucarne de résultat de la pascaline présente deux chiffres positionnés l'un au-dessus de l'autre qui sont complémentaires. La barre horizontale coulissante masque une ligne à la fois, montrant ainsi soit tous les chiffres directs, soit tous leurs compléments.

Comment alors effectuer la soustraction 479 – 135 ?

- Mettre la barre en mode soustraction (haut visible).
- Afficher 479 dans la lucarne (donc le complément C(479) = 520 est masqué).
- Tourner les roues en entrant 135 dans l'inscripteur.

La machine calcule alors C(479) + 135 = 655 (toujours masqué), mais on voit le complément de ce nombre, c'est-à-dire C(655) = 344, qui est bien le résultat de la soustraction 479 – 135 ! Mathématiquement, cela résulte du fait que :

$$C(C(A)+B) = A - B$$

Et les autres opérations ?

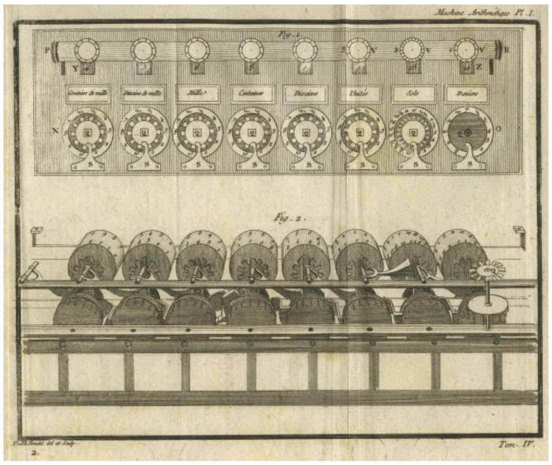
Rien n'empêche de faire des multiplications par additions successives, ni des divisions par soustractions successives. Ce que nous trouverions un peu fastidieux devait être jugé très commode à l'époque de Pascal. Des rondelles de mémoire, présentes sur certaines machines, permettent de conserver des résultats intermédiaires.

Plusieurs versions de la pascaline

Les calculs comptables de cette époque étaient compliqués du fait que le système monétaire n'était pas décimal : une livre valait vingt sols, et un sol valait douze deniers. Il en était de même pour le calcul des longueurs : 1 toise valait 6 pieds, 1 pied valait 12 pouces et un pouce valait 12 lignes.

Mais une fois compris le principe de l'addition, la pascaline peut être aisément adaptée aux usages des comptables ou des géomètres : il suffit d'utiliser des roues avec plus ou moins de crans (et utiliser le complément dans la bonne base). Par exemple la roue correspondant aux deniers a 12 crans, numérotés de 0 à 11, et entraîne la roue des sols lors du passage de onze à douze deniers.

Trois types de machines créées par Pascal nous sont parvenus : scientifique (base 10), comptable (bases 10, sols, deniers) et géomètre (toise, pied, pouce, ligne). Huit ont survécu jusqu'à nos jours, une neuvième fut assemblée au XVIII^{e} siècle avec des pièces restantes. Vous pouvez en voir au Musée des arts et métiers à Paris et au muséum Henri-Lecoq à Clermont-Ferrand.



Machine comptable.

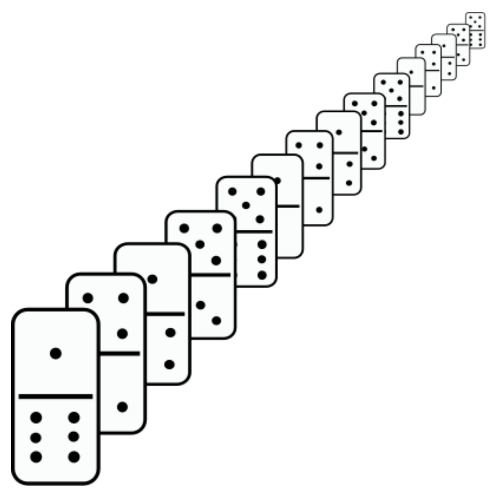
Principe de récurrence

Même s'il en existe des traces moins formalisées bien avant, on trouve dans le *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal, écrit en 1654 mais publié en 1665, ce qui est généralement considéré comme la première utilisation explicite du principe de récurrence. Ce type de raisonnement est une méthode très utile en mathématique car elle permet de démontrer une propriété portant sur tous les nombres entiers.

L'idée sur laquelle repose le principe de récurrence est simple : imaginez un nombre infini de domino et supposons :

- que le premier domino tombe,
- que la chute d'un domino quelconque entraîne inévitablement la chute du suivant.

Alors par le principe de récurrence, on en déduit que *tous* les dominos tombent.



Prenons un exemple plus mathématique. On s'intéresse à une propriété qui dépend d'un nombre entier *n,* comme par exemple :

« la somme des *n* premiers nombres entiers, *1 + 2 + ... + n*, vaut *n(n+1)/2 ».*

On souhaite montrer que cette égalité est vraie quel que soit l'entier *n*. Pour cela, on doit vérifier que :

- Initialisation : la propriété est satisfaite par l'entier 1. (dans notre exemple, on a bien 1 = 1(1+1)/2).
- Hérédité : chaque fois que cette propriété est satisfaite par un certain nombre entier *n* plus grand ou égal à 1, elle est également satisfaite par l'entier suivant, c'est-à-dire par le nombre entier *n+1*.

Dans notre exemple, si on sait que 1 + 2 + … + n = n(n+1)/2, alors :

1 + 2 + … + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n/2 + 1) = (n+1)(n+2)/2.

Alors, d'après le principe de récurrence, on conclut que la propriété est vraie pour tous les entiers plus grands que 1.

Pour voir si vous avez bien compris, je vais maintenant vous démontrer par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout nombre entier *n≥1* :

« dans tout groupe de n chaussettes, toutes les chaussettes sont de la même couleur. »

Initialisation : la propriété est vraie quand je n'ai qu'une chaussette, donc pour *n=1*.

Hérédité : je suppose que cette propriété est vraie pour les groupes de *n* chaussettes (où *n≥1*). Je dois montrer qu'elle est vraie pour les groupes de *n+1* chaussettes.

Prenons les *n+1* chaussettes (voir figure ci-dessous). Par hypothèse, les *n* chaussettes à gauche ont la même couleur, et de même, les *n* chaussettes à droite ont la même couleur. Comme il y a une chaussette qui appartient à la fois au groupe de droite et au groupe de gauche, les *n+1* chaussettes ont la même couleur.

Conclusion, par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, dans tout groupe de n chaussettes, toutes les chaussettes sont de la même couleur !

C'est évidemment absurde, vous le savez bien… J'ai donc fait une erreur de raisonnement. Saurez-vous trouver la faille[3] ?

Références

DESARGUES, Girard. Brouillon *project d'une Atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*, par L,S,G,D,L, 1639.

PASCAL, Blaise. *Essay pour les coniques*. 1640. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262279/f5.item

PASCAL, Blaise. *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Éditeur : G. Desprez, Paris, 1665. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/

PASCAL, Blaise. *La Machine d'arithmétique*. Lettre dédicatoire à Monseigneur le Chancelier, 1645. https://fr.wikisource.org/wiki/La_Machine_d%E2%80%99arithm%C3%A9tique#Lettre_d%C3%A9dicatoire_%C3%A0 Monseigneur_le_Chancelier.

[3] L'erreur est cachée dans la partie « hérédité » de la preuve. La démonstration est juste, mais seulement s'il y a une chaussette commune aux deux groupes, donc quand $n+1 \geq 3$, c'est-à-dire $n \geq 2$.